Szöveges feladatok
Megoldások

1) Panni és Kati elvállalta, hogy a szövegszerkesztővel legépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezne a gépeléssel.
Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kézirat 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát.

a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót, és megszakítás nélküli munkát feltételezve)? **(9 pont)**

Szerdán reggel egyszerre kezdtek 9 órakor a gépeléshez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egy órányi időtartamra megszakította.

b) Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán? **(7 pont)**

<u>Megoldás:</u>

a) Jelölje x azt az időt órában, amennyi idő alatt Panni egyedül begépelte volna a kéziratot, y pedig azt, amennyi alatt Kati végezte volna el ugyanezt a munkát egyedül. Panni szerdán t órát fordított gépelésre.
Foglaljuk táblázatba a szövegből kiolvasható adatokat:

	A teljes munka elvégzése (h)	1 óra alatti teljesítmény	Gépelésre fordított idő (h) kedden
Panni	x	$\frac{1}{x}$	6
Kati	y	$\frac{1}{y}$	4
együtt	12	$\frac{1}{12}$	

A táblázat helyes kitöltése. (3 pont)
Mindezekből tudhatjuk:
A munka elvállalásakor $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$ (1 pont)

a keddi nap végén $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}=\frac{2}{5}$ (2 pont)

A két egyenletből: $x=30$ óra és $y=20$ óra (2 pont)
A feladat feltételeinek megfelelően **Panni 30 óra, Kati 20 óra alatt végzett volna egyedül a munkával.** (1 pont)

b) Szerdán Panni t, Kati $t-\frac{1}{2}$ órát gépelt. (1 pont)

Szerda délután, a munka befejezésekor $\frac{t}{30}+\frac{t-\frac{1}{2}}{20}=\frac{3}{5}$ (2 pont)

Ebből $t=7,5$ óra (1 pont)
Panni fél órát ebédelt, így a gépelésre fordított 7,5 óra 8 óra munkaidőre változik.

Kati szerdán $7{,}5-0{,}5=7$ órát gépelt, és egy órával több (vagyis 8) volt a munkaideje. (2 pont)

Szerdán 9 órakor kezdtek, és mindketten 8 óra munkaidő után fejezték be a gépelést, vagyis **17 órára lettek készen a kézirattal.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) A világhírű GAMMA együttes magyarországi koncertkörútja során öt vidéki városban lépett fel. Az alábbi táblázat tartalmazza a körút néhány üzleti adatát.

város	**fizető nézők száma**	**egy jegy ára (Ft)**	**bevétel a jegyeladásból (ezer Ft)**
Debrecen	**12350**		**14820**
Győr	**8760**		**12264**
Kecskemét		**1600**	**22272**
Miskolc	**9970**	**1500**	
Pécs		**1300**	**15405**

a) A koncertturné során melyik városban adták el a legtöbb jegyet? (3 pont)

b) Mennyi volt az összes eladott jegy átlagos ára? (4 pont)

Bea elment Budapesten a GAMMA együttes koncertjére, és becslése szerint 50000 ember hallgatta a zenét. Peti Prágában volt az együttes koncertjén, ahol a nézők számát 60000 főre becsülte. A GAMMA együttes menedzsere, aki ismerte a tényleges nézőszámokat, elárulta, hogy:

- **Budapesten a tényleges nézőszám nem tér el 10%-nál többel a Bea által adott becsléstől**
- **Peti becslése nem tér el 10%-nál többel a tényleges prágai nézőszámtól**

c) Mekkora a budapesti nézőszám és a prágai nézőszám közötti eltérés lehetséges legnagyobb értéke, a kerekítés szabályainak megfelelően ezer főre kerekítve? (6 pont)

d) A fenti adatok ismeretében előfordulhatott-e, hogy Budapesten és Prágában ugyanannyi ember volt a GAMMA együttes koncertjén? (3 pont)

Megoldás:

a) A kitöltött táblázat:

város	fizető nézők száma	egy jegy ára (Ft)	bevétel a jegyeladásból (ezer Ft)
Debrecen	12350	**1200**	14820
Győr	8760	**1400**	12264
Kecskemét	**13920**	1600	22272
Miskolc	9970	1500	**14955**
Pécs	**11850**	1300	15405

Kecskeméten 13920, Pécsett 11850 fizető néző volt (2 pont)

A legtöbb fizető néző **Kecskeméten** volt (1 pont)

b) Az öt városban összesen 56850 fizető néző volt (1 pont)

Miskolcon a jegyeladásból 14955 ezer Ft bevétel származott (1 pont)

Az öt városban az összes bevétel 79716 ezer Ft volt (1 pont)

Az átlagos jegyár $\frac{79716000}{56850}=\mathbf{1402}$ Ft volt (1 pont)

c) Bea becslése 50000 fő, ennek 10%-a 5000 fő. Ha a tényleges nézőszám Budapesten b, akkor $45000 \le b \le 55000$ (1 pont)

Peti becslése 60000 fő, ennek 10%-a 6000 fő. Ha a tényleges nézőszám Prágában p, ennek a 10%-a $0{,}1p$, akkor $0{,}9p \le 60000 \le 1{,}1p$ (2 pont)

Innen $54546 \le p \le 66666$. (1 pont)

A legnagyobb eltérés akkor van a két nézőszám között, ha $b = 45000$ és $p = 66666$. Ekkor az eltérés $66666 - 45000 = 21666$ fő (1 pont)

A nézőszámok közötti lehetséges legnagyobb eltérés ezresekre kerekített értéke **22 ezer fő** (1 pont)

d) A b-re kapott és p-re kapott reláció miatt az azonos b és p értékeket a $[45000;55000]$ és az $[54546;66666]$ intervallumok közös egész elemei adják (1 pont)

Tehát $b = p$, ha mindkét nézőszám ugyanazon eleme az $[54546;55000]$ intervallumnak (1 pont)

Mindezekből következik, hogy **lehetséges, hogy a két fővárosban azonos számú néző hallgatta a GAMMA együttest.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

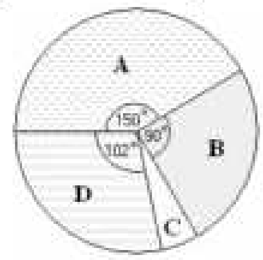
3) Az érett szilva tömegének kb. 5%-a mag tömege. A kimagozott szilva átlagosan 90% vizet és ún. 10% szárazanyagot tartalmaz. A szilva aszalásakor a szárítási technológia során addig vonunk el vizet a kimagozott szilvából, amíg a megmaradt tömegének csak az 5%-a lesz víz, a többi a változatlan szárazanyag-tartalom. Az így kapott terméket nevezzük aszalt szilvának.

a) A fentiek figyelembevételével mutassa meg, hogy 10 kg leszedett szilvából 1 kg aszalt szilva állítható elő! (6 pont)

Az aszalt szilva kilóját 1400 Ft-ért, a nyers szilvát pedig 120 Ft-ért lehet értékesíteni.

b) Kovács úr szilvatermésének felét nyersen, másik felét pedig aszalt szilvaként adta el. Hány kg volt Kovács úr szilvatermése, ha a nyers és az aszalt szilvából összesen 286000 Ft bevételhez jutott? (3 pont)

A piacon egy pénteki napon összesen 720 kg szilvát adtak el. Ez a mennyiség az alábbi kördiagram szerint oszlik meg az *A*, *B*, *C* és *D* fajták között.



c) Átlagosan mennyit fizettek a vevők egy kilogrammért az adott napon, ha az egyes fajták ára:

A- 120 Ft/kg C 230 Ft/kg

B- 200 Ft/kg D 260 Ft/kg (7 pont)

Megoldás:

a) 10 kg leszedett szilvából kimagozás után 9,5 kg szilva lesz (1 pont)

A 9,5 kg kimagozott szilvából 90% víz, míg 10%, azaz 0,95 kg a szárazanyag-tartalom (1 pont)

A 10 kg nyers szilvából készült aszalt szilvában ez a 0,95 kg a feltétel szerint a tömeg 95%-a, hiszen csak 5%-a víz. (2 pont)

Tehát keressük, hogy hány kg-nak a 95%-a lesz 0,95 kg. Így adódik a 100%-ra **1 kg**. (1 pont)

Azaz 10 kg szilvából valóban mindössze 1 kg aszalt szilva lesz. (1 pont)

b) Ha x kg volt a termése, akkor a feltétel szerint:

$\frac{x}{2} \cdot 120 + \frac{x}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 1400 = 286000$ (2 pont)

$\mathbf{x = 2200}$ **kg** (1 pont)

c) A: 150° $\frac{150°}{360°}=\frac{5}{12}$ rész (300 kg)

B: 90° $\frac{90°}{360°}=\frac{1}{4}$ rész (180 kg)

C: 18° $\frac{18°}{360°}=\frac{1}{20}$ rész (36 kg)

D: 102° $\frac{102°}{360°}=\frac{17}{60}$ rész (204 kg) (4 pont)

Az átlagár súlyozott közép:

$$\frac{120\cdot\frac{5\cdot720}{12}+200\cdot\frac{720}{4}+230\cdot\frac{720}{20}+260\cdot\frac{17\cdot720}{60}}{720}=$$ (2 pont)

$$=\frac{1111}{6}\approx185{,}17$$

Tehát az átlagár kb. **185 Ft.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) Egy üzletben háromféle palackozott ecet van a polcon: 12 db 10%-os, 8 db 15%-os és 5 db 20%-os. Mindegyiket azonos csomagolásban, 1 literes kiszerelésben árulják.

a) Hány százalékos ecetet kapnánk, ha a polcon lévő összes ecetet összeöntenénk? (3 pont)

Kázmér elképzelése az, hogy egy palack ecet árát az üres palack árából, a tömény ecet valamint a tiszta víz literenként árából kalkulálják ki.

b) Az üres palack ára 30 Ft, a tömény ecet literje 500 Ft, a tiszta víz literje 10 Ft. Mennyibe kerülne a három különböző töménységű palackozott ecet az üzletben, ha a fogyasztói ár a Kázmér elképzelése szerint kalkulált ár 120%-a? (A fogyasztói árat a végén kerekítik egész forintra.) (5 pont)

Kázmér felírta a literes palackok bolti árait: a 10%-os ecet 144 Ft, a 15%-os 150 Ft, a 20%-os 156 Ft.

c) Ha ezeket az árakat a b) részben leírtak szerint kalkulálták, akkor ki lehet-e mindezekből számítani az üres palack, a tömény ecet és a tiszta víz árát? (8 pont)

Megoldás:

a) A 12 liter 10%-os ecet tömény tartalma: 1,2 liter, a 8 liter 15%-os eceté is 1,2 liter, az 5 liter 20%-osé pedig 1 liter. (1 pont)

Az összehasonlítás utáni 25 liter keverékben a tömény ecet 3,4 liter. (1 pont)

Ezért a keverék $\frac{3,4}{25}=\frac{13,6}{100}=\mathbf{13,6\%}$**-os** (1 pont)

b) Ha a palackban a tömény ecet mennyisége a (liter), a tiszta vízé b (liter), Kázmér számolása szerint egy palack ára $1{,}2\cdot(500a+10b+30)$ forint, (2 pont)

ami a 10%-os palackesetén $1{,}2\cdot(500\cdot0{,}1+10\cdot0{,}9+30)\approx$ **107 Ft** (1 pont)

a 15%-os palack estén $1{,}2\cdot(500\cdot0{,}15+10\cdot0{,}85+30)\approx$ **136 Ft** (1 pont)

a 20%-os palack esetén $1{,}2\cdot(500\cdot0{,}2+10\cdot0{,}8+30)\approx$ **166 Ft** (1 pont)

c) Kázmér kalkulációja alapján a kereskedelmi árrés nélkül megállapított árak a 10%-os palack esetén 120 Ft, a 15%-os palackra 125 Ft, a 20%-osra pedig 130 Ft. (2 pont)

Jelölje a palack árát forintban p, a tömény ecet literjének árát t és a víz literjének árát v. Felírhatók az alábbi egyenletek:

(1) $p+0{,}1\cdot t+0{,}9\cdot v=120$

(2) $p+0{,}15\cdot t+0{,}85\cdot v=125$

(3) $p+0{,}2\cdot t+0{,}8\cdot v=130$ (3 pont)

A (2)-(1) egyenletekből kapjuk, hogy $0{,}05\cdot t-0{,}05\cdot v=5$ (1 pont)

Ugyanezt kapjuk a (3)-(2) egyenletekből (1 pont)

A három egyenlet tehát nem független egymástól. A p, t és v egyértelmű értékeinek megállapítása ezekből az adatokból nem lehetséges. (1 pont)

Összesen: 16 pont

5) Egy áruházban egy mosóport négyféle kiszerelésben árusítanak. Az első kiszerelés 50%-kal drágább a harmadiknál, és 20%-kal kevesebb mosópor van benne, mint a másodikban. A második 50%-kal több mosóport tartalmaz, mint a harmadik, és 25%-kal többe kerül, mint az első.

a) Az első három kiszerelés közül melyikben a legalacsonyabb a mosópor egységára? (13 pont)

A negyedik fajta kiszerelést úgy állították össze, hogy annak dobozán a feltüntetett egységár megegyezett az első három kiszerelés átlagos egységárával.

b) Ha a legolcsóbb kiszerelésű dobozon 600 Ft egységárat tüntettek fel, akkor hány forint egységár szerepel a negyedik fajta dobozon?(3 pont)

Megoldás:

a) (12 pont)

	1.	2.	3.
ár	$1{,}5x$	$1{,}25\cdot 1{,}5x = 1{,}875x$	x
tömeg	$1{,}5\cdot 0{,}8y = 1{,}2y$	$1{,}5y$	y
egységár $=\dfrac{\text{ár}}{\text{tömeg}}$	$\dfrac{1{,}5x}{1{,}2y} = 1{,}25\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{1{,}875x}{1{,}5y} = 1{,}25\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{x}{y}$

Tehát a harmadik kiszerelés egységára a legalacsonyabb. (1 pont)

b) Ha a legolcsóbb kiszerelés egységára 600 Ft, a másik kettőé ennek a 125%-a, azaz 750-750 Ft. (1 pont)

A három kiszerelés átlagos egységára: $\dfrac{600+750+750}{3}=700$ (1 pont)

A negyedik kiszerelésen **700 Ft** egységár szerepel. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Egy egyetem 10 580 hallgatójának tanulmányi lapjáról összesítették az angol és német nyelvvizsgák számát. Kiderült, hogy a német nyelvvizsgával nem rendelkezők 70%-ának, a német nyelvvizsgával rendelkezők 30%-ának nincs angol nyelvvizsgája. Az angol nyelvvizsgával nem rendelkezők 60%-ának nyelvvizsgája sincs.

a) **Ezek közül a hallgatók közül hányan rendelkeznek angol és hányan német nyelvvizsgával?** **(12 pont)**

b) **A hallgatók hány százaléka rendelkezett angol és német nyelvvizsgák mindegyikével?** **(4 pont)**

Megoldás:

a) Szemléltessük a feltételeket ábrával, ahol a hallgatók közül x főnek nincs német nyelvvizsgája és $(10580-x)$ főnek van német nyelvvizsgája.

	nincs német nyelvvizsgája (x fő)	van német nyelvvizsgája $(10580-x)$
nincs angol nyelvvizsgája	nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája	van német, de nincs angol nyelvvizsgája
van angol nyelvvizsgája	nincs német, de van angol nyelvvizsgája	német és angol nyelvvizsgája is van

A feladat helyes értelmezése (komplementer halmazok) (1 pont)

A feladat feltétele alapján az x fő 70%-ának, vagyis $0{,}7x$ főnek nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája (1 pont)

és a $(10580-x)$ fő 30%-ának vagyis főnek van német, de nincs angol nyelvvizsgája. (1 pont)

Tehát nincs angol nyelvvizsgája $0{,}7x+0{,}3\cdot(10580-x)=$ (1 pont)

$=3174+0{,}4x$ főnek. (1 pont)

Így a feladat feltétele szerint a $3174+0{,}4x$ fő 60%-ának, vagyis $0{,}6\cdot(3174+0{,}4x)$ főnek nincs sem német, sem angol nyelvvizsgája. (1 pont)

Vagyis $0{,}7x=0{,}6\cdot(3174+0{,}4x)$ (2 pont)

Innen $x=4140$ (1 pont)

A német nyelvvizsgával rendelkezők száma: $(10580-x)=$ **6440 fő.** (1 pont)

Nincs angol nyelvvizsgája $3174+0{,}4x=4830$ főnek. (1 pont)

Van angol nyelvvizsgája $10580-4830=$ **5750 fő.** (1 pont)

b) A német vizsgával rendelkező 6440 fő 30%-a, (vagyis 1932 fő) nem vizsgázott angolból, (1 pont)

vagyis a német nyelvvizsgával rendelkezők 70%-a angolból is vizsgázott, ezek száma 4508 fő. (1 pont)

$\frac{4508}{10580}=0{,}426$ (1 pont)

A hallgatók **42,6%-**ának van angolból és németből is vizsgája. (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Egy város sportklubjának 640 fős tagságát felnőttek és diákok alkotják. A tagság 55%-a sportol rendszeresen. A rendszeresen sportoló tagok számának és a sportklub teljes taglétszámának az aránya $\frac{11}{8}$-szor akkora, mint a rendszeresen sportoló felnőttek számának aránya a felnőtt klubtagok számához viszonyítva. A rendszeresen sportolók aránya a felnőtt tagságban fele akkora, mint amekkora ez az arány a diákok között. Hány felnőtt és hány diák tagja van ennek a sportklubnak? **(13 pont)**

Megoldás:

Jelölje f a sportklub felnőtt tagjainak számát. Ekkor a diákok száma a sportklubban $640-f$. (1 pont)

A rendszeresen sportolók száma 640-nek az 55%-a, vagyis $0,55\cdot 640=352$ fő. (1 pont)

A rendszeresen sportolók aránya a teljes tagságban 0,55. Ennek a $\frac{8}{11}$-ed része, vagyis $0,55\cdot\frac{8}{11}=0,4$ a rendszeresen sportolók aránya a felnőttek között. (2 pont)

A rendszeresen sportolók aránya a diákok között ennek az arányszámnak a kétszerese, vagyis 0,8. (1 pont)

A rendszeresen sportoló felnőttek száma $0,4\cdot f$ (1 pont)

A rendszeresen sportoló diákok száma $0,8\cdot(640-f)$ (1 pont)

A rendszeresen sportolók száma e két létszám összege: $0,4f+0,8\cdot(640-f)=352$ (2 pont)

Innen $f=400$ (1 pont)

és $640-f=240$ (1 pont)

A felnőtt tagok száma 400, a diákok száma 240. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 13 pont

8) A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

a) Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségek összege, ha a 14 400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak? (4 pont)

b) A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege? (12 pont)

Megoldás:

a) 16 nyomólemez óránként 1600 plakát elkészítését teszi lehetővé, (1 pont)

ezért a teljes mennyiséghez $\frac{14400}{1600}=9$ óra szükséges. (1 pont)

A nyomólemezek előállítási költsége és a munkaidő további költségének összege: $16\cdot 2500+9\cdot 40000=$ **400 000 Ft.** (2 pont)

b) Ha a nyomda x darab nyomólemezt használ, akkor ennek a költsége $2500x$. (1 pont)

Az x darab lemezzel óránként $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14 400 darab kinyomtatásához $\frac{14400}{100x}=\frac{144}{x}$ órát vesz igénybe, (1 pont) és ez további $\frac{5,76\cdot 10^6}{x}$ forint, (1 pont)

A két költség összege $K(x)=2500x+\frac{5,76\cdot 10^6}{x}$, ahol x pozitív egész. (1 pont)

Tekintsük a pozitív valós számok halmazán a K utasítása szerint értelmezett függvényt. (1 pont)

Az így megadott K függvény minimumát keressük. A K függvény deriválható és minden $0<x$ esetén $K'(x)=2500-\frac{5,76\cdot 10^6}{x^2}$. (1 pont)

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $K'(x)=0$ (1 pont)

$2500-\frac{5,76\cdot 10^6}{x^2}=0$, innen $x^2=2304$, (1 pont)

amiből $x=48$, mert $x>0$. (1 pont)

Annak igazolása, hogy az $x=48$ (abszolút) minimumhely: $\left(K''(x)=\frac{1,152\cdot 10^7}{x^3}\right)$ (1 pont)

Azaz 48 nyomólemez alkalmazása esetén lesz minimális a költség (1 pont)

48 darab nyomólemez alkalmazása esetén a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege: $\boldsymbol{K(48)=240\,000}$ **Ft.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy 2011-ben készült statisztikai összehasonlításban az alábbiakat olvashatjuk:

„Ha New York-ban az átlagfizetést és az átlagos árszínvonalat egyaránt 100%-nak vesszük, akkor Budapesten az átlagfizetés 23,6%, az átlagos árszínvonal pedig 70,9%. (Az árszínvonal számításához 122 áru és szolgáltatás árát hasonlították össze.)"

Feltételezve, hogy az idézet megállapításai igazak, válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a) Ha Budapesten az átlagfizetés 150 ezer forint, akkor hány dollár ($) a havi átlagfizetés New York-ban, 190 forint/dollár ($) árfolyammal számolva? Válaszát egész dollárra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Ha a New York-i havi átlagfizetésből egy bizonyos termékből 100 kg-ot vásárolhatunk New York-ban, akkor körülbelül hány kg-ot vásárolhatunk ugyanebből a termékből a budapesti havi átlagfizetésből Budapesten? (Feltehetjük, hogy a termék egységára 70,9%-a a termék New York-i egységárának.) (7 pont)

Megoldás:

a) első megoldás:

A New York-i átlagfizetés $\frac{150000}{0,236}(\approx 635\,593)$ forint, (2 pont)

ami $\frac{150000}{0,236\cdot 190}\approx$ (1 pont)

≈ 3345 $-nak felel meg. (1 pont) második megoldás röviden

150000 Ft megfelel $\frac{150000}{190}(\approx 789{,}5)$ dollárnak. Ez 23,6%-a a New York-i átlagfizetésnek, amely így $\frac{150000}{0{,}236 \cdot 190} \approx$ **3345 $**.

b) New Yorkban 3345$-ért 100 kg vehető, tehát 1 kg ára 33,45 $. (1 pont)

Budapesten 1 kg árut ennek 70,9%-áért lehet vásárolni, azaz $33{,}45 \cdot 0{,}709(\approx 23{,}72)$\$-ért. (2 pont)

Ez megfelel $33{,}45 \cdot 0{,}709 \cdot 190(\approx 4506)$ Ft-nak. (1 pont)

A budapesti átlagfizetésből ennyi pénzért $\frac{150000}{33{,}45 \cdot 0{,}709 \cdot 190} \approx$ (2 pont)

$\approx$ **33,3 kg** terméket lehet vásárolni. (1 pont)

Összesen: 11 pont

10) A „TOJÁS" farmon átlagosan 10000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak. A tenyésztők azt tapasztalták, hogy – valószínűleg a zsúfoltság csökkenése mi att – ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.

a) A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés? (5 pont)

Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának *p*%-kal történő csökkenése 2*p*%-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p < 30$ esetén érvényes.

b) Hány százalékkal csökkentették tavaly a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt? (11 pont)

Megoldás:

a) A tyúkok számát 4%-kal csökkentve $10000 \cdot 0{,}96 = 9600$ tyúk lesz (1 pont)

az 1 tojóra jutó tojástermelés $\frac{2{,}2 \cdot 10^6}{10000} \cdot 1{,}08 = 237{,}6$ lett (2 pont)

Tehát az évi termelés $10000 \cdot 0{,}96 \cdot \frac{2{,}2 \cdot 10^6}{10000} \cdot 1{,}08$ (1 pont)

azaz $2280960 \approx 2{,}28 \cdot 10^6$. Tehát az **évi termelés 2,28 millió tojás.** (1 pont)

b) A keresett százalékot *p*-vel jelölve $(p < 30)$, a tyúkok számát *p*%-kal csökkentve adódik, hogy számuk $10000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ (1 pont)

Az 1 tojóra jutó termelés $\frac{2{,}2 \cdot 10^6}{10000} \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right)$ lett. (2 pont)

A szöveg szerint $10000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{2{,}2 \cdot 10^6}{10000} \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 2{,}2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}08$ (1 pont)

Azaz $\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 1{,}08$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát 10000-el beszorozva $(100 - p)(100 + 2p) = 10800$ (1 pont)

A szorzás elvégzése után: $10000 + 100p - 2p^2 = 10800$ (1 pont)

Rendezés után: $p^2 - 50p + 400 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. (1 pont)

Ennek megoldásai: 40 és 10 (1 pont)
Mivel $p<30$, így csak 10 lehet a megoldás. (1 pont)
Ellenőrizve, ha a 9000-re csökkentett létszám esetén 20%-kal nő az egy tyúkra jutó tojásmennyiség, azaz $\frac{2,2\cdot 10^6}{10000}\cdot 1,2$ lesz, ekkor az évi termelés $2,2\cdot 10^6\cdot 1,08$. Tehát **10%-kal kell csökkenteni** a tyúkok számát. (1 pont)

Összesen: 16 pont

11) Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert" vagy a „Nem nyert" felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10 000 000
40	50 000
800	10 000
150 000	1 000
400 000	500
1 000 000	200
3 449 156	0

a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvennének, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete? (3 pont)

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet? (4 pont)

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.) (4 pont)

Megoldás:

a) A bevétel: $5\cdot 10^6\cdot 200=10^9$ Ft (1 pont)
A kifizetett nyeremény:
$4\cdot 10^7+2\cdot 10^6+8\cdot 10^6+1,5\cdot 10^8+2\cdot 10^8=4\cdot 10^8$ Ft (1 pont)
Tehát a különbözet 400 millió Ft. (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 21. feladat*

c) A felvehető nyeremény várható értéke:
$$\frac{4\cdot 10^7+2\cdot 10^6+8\cdot 10^6+1,5\cdot 10^8+2\cdot 10^8}{5\cdot 10^6}=120\text{ Ft}$$ (3 pont)
A nyereség várható értéke tehát $120-200=$ **-80 Ft**. (1 pont)

Összesen: 11 pont

12) Arany ékszerek készítésekor az aranyat mindig ötvözik valamilyen másik fémmel. A karát az aranyötvözet finomságát jelöli. Egy aranyötvözet 1 karátos, ha az ötvözet teljes tömegének $\frac{1}{24}$ része arany, a *k* karátos aranyötvözet tömegének $\frac{k}{24}$ része arany.

Kata örökölt a nagymamájától egy 17 grammos, 18 karátos aranyláncot. Ebből két darab 14 karátos karikagyűrűt szeretne csináltatni.

a) Legfeljebb hány gramm lehet a két gyűrű együttes tömege, ha aranytartalmuk összesen sem több mint az aranylánc aranytartalma? (4 pont)

Kata végül két olyan gyűrűt készíttetett, amelyek együttes tömege 16 gramm. (A megmaradó 14 karátos aranyötvözetet törtaranyként visszakapta.) Az elkészült két karikagyűrű tekinthető két lyukas hengernek, amelyek szélessége (a lyukas hengerek magassága) megegyezik. Az egyik gyűrű belső átmérője 17 mm, és mindenhol 1,5 mm vastag, a másik gyűrű belső átmérője 19,8 mm, vastagsága pedig mindenhol 1,6 mm.

b) Hány mm a gyűrűk szélessége, ha a készítésükhöz használt 14 karátos aranyötvözet sűrűsége $15\frac{g}{cm^3}$? (10 pont)

Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) A 17 gramm 18 karátos ékszer aranytartalma $17\cdot\frac{18}{24}=12,75$ (gramm).(2 pont)

x gramm 14 karátos ékszer aranytartalma: $x\cdot\frac{14}{24}=12,75$ (gramm). (1 pont)

Ebből $x\approx 21,86$, így a két gyűrű együttes tömege legfeljebb **21,9 gramm**.

(1 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 19. feladat*

Összesen: 14 pont

13) A tavaszi idény utolsó bajnoki mérkőzésén a Magas Fiúk Kosárlabda Klubjának (MAFKK) teljes csapatából heten léptek pályára. A mérkőzés után az edző elkészítette a hét játékos egyéni statisztikáját. Az alábbi táblázat mutatja a játékosok dobási kísérleteinek számát és az egyes játékosok dobószázalékát egészre kerekítve. (A dobószázalék megmutatja, hogy a dobási kísérleteknek hány százaléka volt sikeres.)

Játékos mezszáma	Dobási kísérletek száma	Dobószázalék
4	2	50
5	3	0
6	10	60
7	8	25
10	7	43
13	6	33
15	14	57

a) Számítsa ki, hogy mennyi volt a csapat dobószázaléka ezen a mérkőzésen! (5 pont)

Az őszi idény kezdete előtt egy hónappal a MAFKK csapatához csatlakozott egy 195 cm magas játékos, így a csapattagok magasságának átlaga a korábbi átlagnál 0,5 cm-rel nagyobb lett. Pár nap múlva egy 202 cm magas játékos is a csapat tagja lett, emiatt a csapattagok magasságának átlaga újabb 1 cm-rel nőtt.

b) Hány tagja volt a MAFKK-nak, és mekkora volt a játékosok magasságának átlaga a két új játékos csatlakozása előtt? (11 pont)

Megoldás:

a) Az egyes játékosok sikeres dobásainak száma rendre:

1, 0, 6, 2, 3, 2 és 8. (2 pont)

A csapat dobási kísérleteinek a száma a mérkőzésen 50, (1 pont)

a sikeres dobások száma 22 volt. (1 pont)

A csapat dobószázaléka 44. (1 pont)

b) A két új játékos csatlakozása előtt a csapat tagjainak száma x a tagok magasságának átlaga pedig y cm volt $(x \in \mathbb{N}, y > 0)$. (1 pont)

(Az első játékos belépése előtt a csapattagok magasságának összege xy volt, az új játékos után $xy + 195$ lett, tehát) $\frac{xy+195}{x+1} = y + 0{,}5$. (2 pont)

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a második új játékos belépését követően $\frac{xy+195+202}{x+2} = y + 1{,}5$. (2 pont)

Az egyenletek rendezése után a

$\left.\begin{aligned} 0{,}5x + y &= 194{,}5 \\ 1{,}5x + 2y &= 394 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk. (2 pont)

$x = 10$ és $y = 189{,}5$. (2 pont)

A csapat tagjainak száma 10, az átlagos magasságuk pedig 189,5 cm volt. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 16 pont

14) Egy kisvárosban hét nagyobb üzlet található. A tavalyi évben elért, millió forintra kerekített árbevételeikről tudjuk, hogy az átlaguk 120 millió Ft, és ez megegyezik a mediánjukkal. A hét adat egyetlen módusza 100 millió Ft. Két üzletben éppen átlagos, azaz 120 millió forintos a kerekített bevétel, a legnagyobb bevétel pedig 160 millió forint volt.

a) Számítsa ki a kerekített bevételek szórását! (6 pont)

A városban az egyik ruhakereskedéssel foglalkozó kisvállalkozás 80%-os haszonkulccsal dolgozik. Ez azt jelenti, hogy például egy 10 000 Ft-os beszerzési értékű terméket 18 000 Ft-ért árulnak az üzletükben. Amikor akciós időszak van, akkor a „rendes” eladási árból 50%-os árengedményt adnak minden eladott termékre.

b) Mekkora volt az eladásból származó árbevételnek és az eladott áru beszerzési értékének a különbsége (vagyis az „árnyereség”) a tavalyi évben, ha összesen 54 millió Ft volt az éves árbevétel, és ebből 9 millió Ft-ot az akciós időszakban értek el? (4 pont)

A kisvállalkozás üzletében az egyik fajta férfizakóból négyféle méretet árusítanak (S, M, L, XL). Nyitáskor egy rögzített állvány egyenes rúdjára mindegyik méretből 4-4 darabot helyeztek el (minden zakót külön vállfára akasztva, egymás mellett). A nap folyamán ezek közül megvettek 4 darab S-es, 3 darab M-es, és 2 darab L-es méretűt, a megmaradt zakók pedig összekeveredtek.

c) Az üzlet zárásakor hányféle sorrendben lehetnek (balról jobbra nézve) a rúdra akasztva a megmaradt zakók, ha az azonos méretű zakókat nem különböztetjük meg egymástól? (3 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 10. feladat*

b) A rendes eladási ár árengedmény nélkül $(54+9=)63$ millió Ft lett volna.

(1 pont)

Tehát az eladott áru beszerzési értéke $\frac{63}{1,8}=35$ millió Ft, (2 pont)

az árnyereség pedig $(54-35=)$ **19 millió Ft volt.** (1 pont)

c) *Lásd: Kombinatorika 10. feladat*

Összesen: 13 pont

15) A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap *méretarányának* is nevezik.

a) Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz! (4 pont)

A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya $\sqrt{2}$, a területe pedig éppen 1 m².

b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve! (4 pont)

Ha az A0-s papírlapot hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-ös papírlapokat. A leggyakrabban használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os”. A „80 g-os” jelzés azt jelenti, hogy 1 m² területű másolópapír tömege 80 gramm.

c) Egy csomagban 500 darab A4-es „80 g-os” papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g? (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Síkgeometria 24. feladat*

b) *Lásd: Síkgeometria 24. feladat*

c) Egy A4-es lap az 1 m2 -es A0-s lap négyszeri félbevágásával kapható (A0→A1→A2→A3→A4), (1 pont)

tehát 16 darab A4-es lap együttes területe 1 m². (1 pont)

Az 500 darab A4-es lap területe összesen 31,25 m². (1 pont)

Ezért 1 csomag tömege $31,25\cdot 80+20=2520$ gramm, (1 pont)

azaz **2,52 kg**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

16) Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg ±10 dkg”. (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem mérhető ki.) A minőség-ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak nyolc csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot. A mérések eredménye a következő:

mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

a) A mérési eredmények alapján engedélyezik-e az almák árusítását? (4 pont)

b) Határozza meg a nyolc mérési eredmény átlagát és szórását! (3 pont)

A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg azt tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 Ft/kg, a II. osztályút 650 Ft/kg, a III. osztályút pedig 450 Ft/kg egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós eladási egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte.

c) Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) A mért tömegek között nincs 490 dkg-nál kisebb, tehát az első feltétel teljesül. (1pont)

Az 5 kg-tól való eltérések (dkg-ban) rendre 6, 9, 7, 12, 8, 17, 7, 12. (1pont)

Az eltérések átlaga $\left(\frac{78}{8}=\right)$ 9,75 (dkg). (1pont)

Az árusítást engedélyezik. (1pont)

b) A mért adatok átlaga $\left(\frac{4032}{8}=\right)$ 504 (dkg), (1pont)

szórása $\sqrt{\frac{2\cdot 13^2+2\cdot 11^2+2\cdot 8^2+4^2+2^2}{8}}=\mathbf{\sqrt{91}\approx 9{,}54}$ (2pont)

c) Az eper $\left(1-\frac{7}{20}-\frac{3}{8}=\right)\frac{11}{40}$ része III. osztályú. (1 pont)

Az eredetileg tervezett árakkal számolva az átlagos egységár kilogrammonként $0{,}35\cdot 800+\frac{3}{8}\cdot 650+\frac{11}{40}\cdot 450(=647{,}5)$ Ft lett volna. (3pont)

A kereskedő bevétele akkor lesz az eredetileg tervezett bevétel 85%-a, ha az epret az eredeti átlagos egységár 85%-áért értékesíti. Az eredeti átlagos egységár 85%-a 550,375 Ft/kg. (2 pont)

Az akciós egységár **550 Ft/kg** legyen. (1 pont)

Összesen: 11 pont

17) A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x)=\frac{1}{20}\left(x^2-1800x+950000\right)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban $(x<0)$, $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg? (5 pont)

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v - 502200 + \frac{265050000}{v}$ kg lesz! $(v > 0)$ **(3 pont)**

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességé-re teljesül, hogy 800 km/h $\le v \le$ 1100 km/h.

c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a legnagyobb, és melyik esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás? **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények - Analízis 31. feladat*

b) A repülési idő órában: $t = \frac{5580}{v}$ (1 pont)

Az út során elfogyasztott üzemanyag kg-ban:

$t \cdot f(v) = \frac{5580}{v} \cdot \frac{1}{20}\left(v^2 - 1800v + 950000\right) =$ (1 pont)

$= 279v - 502200 + \frac{265050000}{v}$. (1 pont)

c) *Lásd: Függvények - Analízis 31. feladat*

Összesen 16 pont

18) Egy pár kesztyű árát először p százalékkal csökkentették, majd a csökkentett ár $p + 4,5$ százalékával tovább mérsékelték. A kétszeri árcsökkentés után a kesztyű 18,6%-kal olcsóbb lett, mint az árcsökkenés előtt volt.

a) Határozza meg a két árcsökkentés százalékos értékét! **(8 pont)**

Egy fiókban 3 pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.) A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk.

b) Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét! **(8 pont)**

Megoldás:

a) Az első árcsökkentés után az új ár az eredetinek az $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$-szorosa, (1 pont)

a második árcsökkentés után az eredeti árnak az $\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p+4,5}{100}\right)$ szorosa lett. (1 pont)

Ez az eredeti ár 81,4%-a, tehát $\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p+4,5}{100}\right) = 0,814$. (1 pont)

$p^2 - 195,5p + 1410 = 0$ (2 pont)

$p = 7,5$ vagy $p = 188$, de ez utóbbi $(p > 100$ miatt$)$ nem felel meg a feladat szövegének. (1 pont)

Az első árcsökkentés **7,5%-os**, a második **12%-os** volt. (1 pont)

Ellenőrzés: A két árcsökkentés után az új ár az eredetinek 0,925·0,88 -szorosa lett. 0,925·0,88 = 0,814, tehát az új ár valóban 18,6%-kal alacsonyabb az eredeti árnál. (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 42. feladat*

Összesen: 16 pont

19) A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az *A* program 20%-kal több elektromos energiát, viszont 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a *B* program.
A *B* program 30%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ mosogatáshoz, mint a *C* program.
Mindhárom program futtatásakor 40 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az *A* programmal 151 Ft-ba, *B* programmal 140 Ft-ba kerül.
Mennyibe kerül a *C* programmal a mosogatás? (14 pont)

Megoldás:

A *B* program x Ft értékű elektromos energiát és y Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával (1 pont)

Ekkor $x+y+40=140$ (1 pont)

Az *A* program $1,2x$ Ft értékű elektromos energiát, (1 pont)

és $0,9y$ Ft értékű vizet használ egy mosogatáskor (1 pont)

A költségekre vonatkozó egyenlet: $1,2x+0,9y+40=151$ (1 pont)

A következő egyenletrendszert kapjuk x-re és y-ra:

(1) $x+y=100$

(2) $1,2x+0,9y=111$ (1 pont)

Az egyenletrendszert megoldva: $x=70, y=30$ (3 pont)

A feltételek alapján a *C* program futtatása során az elektromos energia ára:

$\frac{x}{0,7}=100\,\text{Ft}$ (2 pont)

a víz ára: $\frac{y}{1,25}=24\ \text{Ft}$ (2 pont)

A mosogatószer árát is figyelembe véve, a *C* programmal egy mosogatás 164 Ft-ba kerül. (1 pont)

Összesen: 14 pont

20) Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám? (13 pont)

Megoldás:

Jelölje x azt a számot, amelyet 15-tel csökkentünk, y pedig a másikat

$$\left.\begin{aligned} x+y&=29 \\ (x-15)\cdot(y+15)&=5xy \end{aligned}\right\}$$ (3 pont)

Az első egyenletből például y-t kifejezve és a második egyenletbe behelyettesítve: $(x-15)\cdot(29-x+15)=5x(29-x)$ (1 pont)

A műveleteket elvégezve:

$-x^2+59x-660=145x-5x^2$ (2 pont)

Rendezve: $4x^2-86x-660=0$ (1 pont)

Az egyenlet megoldásai a -6 és a 27,5 (2 pont)

Ha a 15-tel csökkentendő szám a **–6**, akkor a másik szám a **35** (1 pont)
Ha a 15-tel csökkentendő szám a **27,5**, akkor a másik szám a **1,5** (1 pont)
Ellenőrzés a szöveg alapján:
Ha a két szám a -6 és a 35, akkor az összegük 29, a szorzatuk -210
A megváltoztatott számok a -21 és az 50, ezek szorzata -1050, ami valóban az 5-szöröse a -210-nek. (1 pont)
Ha a két szám a 27,5 és az 1,5, akkor az összegük 29, a szorzatuk 41,25.
A megváltoztatott számok a 12,5 és a 16,5, ezek szorzata 206,25, ami valóban 5-szöröse a 41,25-nek. (1 pont)

Összesen: 13 pont

21) Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.

a) Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő! (8 pont)

A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása! (6 pont)

Megoldás:

a) Ha a bolti eladásokból származó idei árbevétel b (Ft), akkor az internetes eladásokból származó árbevétel jelenleg $0,7b$ (Ft). $(b>0)$. (1 pont)

Ha a bevételek egyenlősége x év múlva következik, de akkor $1,04^x \cdot 0,7 = 0,98^x \cdot b$, (1 pont)

amiből (a pozitív b-vel való osztás után) $1,04^x \cdot 0,7 = 0,98^x$. (1 pont)

Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve és a logaritmus azonosságait felhasználva:
$x \lg 1,04 + \lg 0,7 = x \lg 0,98$. (2 pont)

Ebből: $x = \dfrac{\lg 0,7}{\lg 0,98 - \lg 1,04} (\approx 6)$. (1 pont)

A két forrásból származó árbevétel **6 év múlva** lesz (körülbelül) egyenlő. (1 pont)
Ellenőrzés... (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 31. feladat*

Összesen: 14 pont

22) A laptopokban is használt B típusú lítiumion-akkumulátorok töltéskapacitása minden teljes töltési ciklusnál az előző értékének körülbelül 0,06%-ával csökken.

a) Hány százalékkal csökkent az új akkumulátor töltéskapacitása, ha 350 teljes töltési ciklust végeztek vele? (4 pont)

Egy B típusú akkumulátorral minden évben körülbelül 200 teljes töltési ciklust végeznek. (Tételezzük fel, hogy két töltési ciklus között mindig ugyanannyi idő telik el.)

b) Mennyi a felezési ideje a kezdetben új akkumulátor töltéskapacitásának (azaz töltési kapacitása mennyi idő alatt csökken a felére)? (6 pont)

Egy használt laptop-akkumulátorokat árusító üzletben a 25 azonos típusú akkumulátor töltéskapacitása 60% és 80% között van, de közülük csak 10-nek kisebb a töltéskapacitása 70%-nál. Egy vevő a 25 akkumulátor közül hármat vásárol meg.

c) Ha a három akkumulátort véletlenszerűen választja ki, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb az egyiknek lesz 70%-nál kisebb a töltéskapacitása? (6 pont)

Megoldás:

a) Minden töltési ciklus után az akkumulátor töltéskapacitása a megelőző értékének kb. 0,9994-szeresére (99,94%-ára) változik. (1 pont)

350 teljes töltés után kapacitásának $0,9994^{350} \approx$ (1 pont)

$\approx 0,8105$ része marad meg, (1 pont)

a csökkenés tehát körülbelül **19%**-os. (1 pont)

b) Az akkumulátor kapacitása n töltési ciklus után a $0,9994^n$ -szeresére változik. (1 pont)

Megoldandó tehát a $0,9994^n = 0,5$ egyenlet. (1 pont)

$n = \log_{0,9994} 0,5 \approx$ (1 pont)

≈ 1155 (1 pont)

Az 1155 töltési ciklushoz $\frac{1155}{200} = 5,775$ év kell, (1 pont)

a felezési idő tehát körülbelül **5,8 év**. (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 39. feladat*

Összesen: 16 pont

23) Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé" válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában $4+3=7$ új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.)

a) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanánk a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót? (8 pont)

A biológiaórán egy kezdetben tízmilliós baktériumhalmaznak a környezethez való alkalmazkodását modellezik a tanulók. Egy szabályos dobókockával dobnak, és ha a dobás eredménye 1, 2 vagy 3, akkor egymillió baktérium elpusztul. Ha a dobás eredménye 4 vagy 5, akkor nem történik semmi. Ha a dobás eredménye 6, akkor újabb egymillió baktérium keletkezik. A dobást többször egymás után megismétlik.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy hét dobás után a baktériumok száma legfeljebb ötmillió lesz! (8 pont)

Megoldás:

a) A megfigyelt szabályszerűség azt jelenti, hogy a harmadik órától kezdve minden órában megduplázódik az addigi összes megfertőződött cellák száma. (1 pont)

Így (mivel a második órában 7 fertőzött cella van) az n-edik órában $(n \geq 2)$ az összes fertőzött cella száma $7 \cdot 2^{n-2}$ (2 pont)

Megoldandó ezért a $7 \cdot 2^{n-2} > 10\,000\,000$ egyenlőtlenség. (1 pont)

A lg függvény szigorúan monoton növekedő, ezért (a 7-tel való osztás után az egyenlőtlenség mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát véve) (1 pont)

$(n-2) \cdot \lg 2 > \lg \frac{10000000}{7}$. (1 pont)

$n > \frac{\lg \frac{10000000}{7}}{\lg 2} + 2 \approx 22{,}4$ (1 pont)

Azaz a fertőzött cellák száma a **23. órában** haladná meg a tízmilliót. (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 41. feladat*

Összesen: 16 pont

24) Ágoston a tanév első két hónapjában három osztályzatot szerzett matematikából (osztályzatok: 1, 2, 3, 4 vagy 5). A második osztályzata nem volt rosszabb, mint az első, a harmadik osztályzata pedig nem volt rosszabb, mint a második.

a) Határozza meg a feltételeknek megfelelő lehetőségek (számhármasok) számát! (5 pont)

Ágoston osztálya kétnapos kirándulásra indul. Kulcsosházban szállnak meg egy éjszakára. A tanulók szállásdíja a résztvevők számától független, rögzített összeg. Az egy tanulóra jutó szállásköltség egy hiányzó esetén 120 Ft-tal, két hiányzó esetén pedig 250 Ft-tal lenne több, mint ha az egész osztály részt venne a kiránduláson.

b) Határozza meg az osztály létszámát és a teljes fizetendő szállásdíjat! (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 40. feladat*

b) Ha az osztálylétszám n fő, az egy tanulóra jutó szállásköltség pedig (n résztvevő esetén) x Ft, akkor

$$\left.\begin{aligned} n \cdot x &= (n-1) \cdot (x+120) \\ n \cdot x &= (n-2) \cdot (x+250) \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Az első egyenletből x-et kifejezve: $x = 120n - 120$ (1 pont)

Ezt a második egyenletbe behelyettesítve és nullára rendezve:

$0 = -2(120n - 120) + 250n - 500$ (1 pont)

$n = 26$ (tehát az osztálylétszám 26 fő), és $x = 3000$ (1 pont)

A fizetendő teljes szállásdíj:

$n \cdot x = 26 \cdot 3000 =$ **78000 Ft**. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 12 pont

25) **Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti.**
Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket. Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt", azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).
A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.
A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

a) **A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?** **(6 pont)**

b) **Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális?** **(10 pont)**

Megoldás:

a) A tanulmány szerint 10 parkolóőr esetén a bliccelők aránya $(25-10\cdot 0,5=)20\%$, (1 pont)

a parkolóőrök alkalmazásának költsége pedig naponta $(330\cdot 10=)3300$ garas lenne. (1 pont)

Mivel az autósok $(100-20=)80$ százaléka fizeti meg a parkolási díjat, ezért a parkolási díjakból származó napi bevétel: $15\,000\cdot 0,8\cdot 10=120\,000$ garas. (2 pont)

A parkolóőrök $(10\cdot 200=)2000$ autót ellenőriznek, ezek 20 százaléka bliccel, ezért a bliccelőktől származó napi bevétel: $2000\cdot 0,2\cdot 150=60\,000$ garas. (1 pont)

A napi nettó bevétel így $120\,000+60\,000-3300=\mathbf{176\,700}$ garas. (1 pont)

b) *Lásd: Függvények - Analízis 36. feladat*

Összesen: 16 pont

26) **Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.**

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot? (3 pont)

b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat: $y = -\frac{1}{5}x + 200$ $(0 < x < 1000)$. (4 pont)

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségárus másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségárus napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.) (7 pont)

Megoldás:

a) Mivel $400 = \frac{500+300}{2}$, ezért 400 Ft/kg-os egységáron a baracknak $\frac{50+70}{2} = 60\%$-a, (1 pont)

azaz $200 \cdot 0{,}6 = 120$ kg fogyna el. (1 pont)

Az ebből származó bevétel $120 \cdot 400 =$ **48000 Ft** lenne. (1 pont)

b) *Lásd: Bizonyítások 22. feladat*

c) *Lásd: Függvények - Analízis 37. feladat*

Összesen: 14 pont

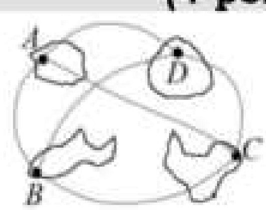
27) Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha különbségük páros szám (de egyik számjegyet se kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

I. Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk. (4 pont)

Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatnak bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. (Az *ábra* azt a több évvel ezelőtti időszakot szemlélteti, amikor még csak négy célállomás és hat repülőjárat volt.)



A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több.

b) Hány célállomásra közlekednek jelenleg? (7 pont)

A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra

ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni.

c) Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve? (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Gráfelmélet 12. feladat*

b) Legyen a célállomások száma a két évvel ezelőtti időpontban n, jelenleg pedig $1,5n$ (n így páros).

A járatok száma korábban $\binom{n}{2}$ volt, jelenleg $\binom{1,5n}{2}$ (1 pont)

A feltétel szerint $\binom{n}{2}+60=\binom{1,5n}{2}$ (1 pont)

$\frac{n(n-1)}{2}+60=\frac{1,5n(1,5n-1)}{2}$ (1 pont)

Nullára rendezve: $0=1,25n^2-0,5n-120$. (1 pont)

Ennek egyik gyöke $-9,6$, ami nem megoldása a feladatnak, a másik gyöke pedig 10. (1 pont)

Jelenleg $(\mathbf{10\cdot 1,5=})\mathbf{15}$ célállomásra közlekednek. (1 pont)

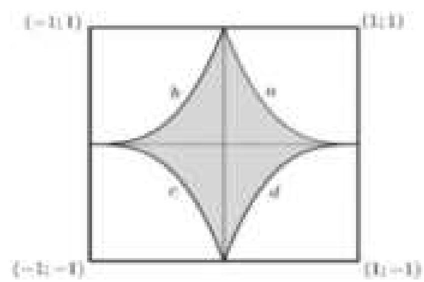
Ellenőrzés: két éve 45, jelenleg 105 járatot közlekedtetnek, és $105=45+60$ valóban igaz. (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 48. feladat*

Összesen: 16 pont

28) Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint.

Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, illetve $(1;-1)$, akkor ebben a koordináta-rendszerben az *a* jelű ív egyenlete: $y=(1-x)^3$, $0\le x\le 1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus.



a) Írja fel a másik három (az ábrán *b, c,* illetve *d* jelű) ív egyenletét is! (4 pont)

A társasjáték gyártója a 2 dm oldalú tábla fehér színű részének bevonásához egy speciális anyagot használ. Ebből 1 kg mennyiség 12 m^2 terület bevonásához elegendő.

b) Számítsa ki, hogy 4000 darab tábla elkészítéséhez hány kg speciális anyag szükséges! (5 pont)

A kétszemélyes társasjátékban minden játszma csak valamelyik játékos győzelmével végződhet, döntetlen nincs. Minden játszmában 1 pontot kap a győztes, a vesztes pedig 0 pontot.

Anna és Bori nagyon szereti ezt a társasjátékot, sok játszmát lejátszottak már. Ha egymás ellen játszanak, akkor Anna 0,4 valószínűséggel, Bori pedig 0,6 valószínűséggel nyer meg egy játszmát.

Egyik alkalommal megállapodnak, hogy addig játszanak újabb játszmákat, amíg valamelyikük először éri el a 10 pontot (és így megnyeri a játékot).

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Bori legfeljebb 12 játszma után megnyeri a játékot? (Kezdéskor mindkettőjüknek 0 pontja van.)

(7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 27. feladat*

b) A tábla jobb felső negyedében a sötétített rész területe:

$\int_0^1 (1-x)^3\, dx = \int_0^1 \left(1-3x+3x^2-x^3\right) dx =$ (1 pont)

$= \left[x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 =$ (1 pont)

$= \frac{1}{4}.$ (1 pont)

A tábla fehér részének területe tehát $\left(2\cdot 2 - 4\cdot\frac{1}{4} =\right) 3\ \text{dm}^2$ (1 pont)

4000 táblán tehát 12000 dm^2 területet kell bevonni, ehhez **10 kg** festékre van szükség. (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás* 50. *feladat*

Összesen: 16 pont

29) Egy középiskolában a tizedikesek évfolyamdolgozatot írtak matematikából. A dolgozatban maximálisan 100 pontot lehetett elérni. Az évfolyamra járó 80 tanuló közül a dolgozat megírásakor néhányan hiányoztak. A dolgozatokban elért pontszámok átlagát először úgy számították ki, hogy a hiányzó tanulók eredményét 0 pontosként vették figyelembe

Rövid időn belül észrevették, hogy ez a számítási mód hibás. A hibát kijavították, így a hiányzók figyelembe vétele nélkül kapott átlag 4,2 ponttal magasabbnak adódott, mint az első (hibás) számítás utáni átlag. Egy héttel később az első megírás alkalmával hiányzó tanulók pótolták a dolgozatot; az ő átlageredményük 64 pont lett (a pótdolgozatban is maximálisan 100 pontot lehetett elérni). A teljes tizedik évfolyam matematika-évfolyamdolgozatainak átlageredménye 67 pontos lett.

a) Hány tanuló hiányzott a dolgozat első megírásakor?
Hány pont volt azoknak a tanulóknak a helyesen számolt átlageredménye, akik az első alkalommal megírták a dolgozatot?

(9 pont)

Az évfolyamdolgozat egyik feladatában öt feleletválasztós kérdésben kellett négy-négy válaszlehetőség közül az egyetlen helyeset kiválasztani. Amikor Domonkos elolvasta a kérdéseket, akkor látta, hogy az első két kérdésre biztosan tudja a helyes választ (ezeket be is jelöli majd), a harmadik és negyedik kérdésnél egy-egy válaszlehetőségről, az ötödik kérdésnél pedig két válaszlehetőségről tudta biztosan, hogy azok rosszak. Ezért úgy döntött. hogy az utolsó három kérdésnél tippelni fog: véletlenszerűen választ azon válaszlehetőségek közül, amelyekről nem tudja biztosan, hogy rosszak.

b) Határozza meg Domonkos helyes válaszai számának várható értékét!

(7 pont)

Megoldás:

a) Jelölje az első alkalommal hiányzó tanulók számát x, $x < 80$, a dolgozatot első alkalommal megírók (helyes) átlageredményét pedig y. ($y > 4,2$).

A pontszámok összegét kétféleképpen felírva $(80-x)y = 80(y-4,2)$ adódik.

A teljes tízedik évfolyam átlageredménye pedig $\frac{(80-x)y+64x}{80} = 67$ pont volt.

(2 pont)

Az első egyenletből $xy = 336$,

a második egyenletből $80y - xy + 64x = 5360$. (1 pont)

Behelyettesítve xy értékét $80y + 64x = 5969$, azaz $6y + 4x = 356$.

Innen $x = 89 - 1,25y$, így $(89-1,25y) \cdot y = 336$,

vagyis $1,25y^2 - 89y + 336 = 0$. (2 pont)

Az egyenlet gyökei $y_1 = 67,2$ és $y_2 = 4$. Az utóbbi nem megfelelő. (1 pont)

$x = \frac{336}{67,2} = 5$ (1 pont)

Tehát az **első alkalommal 5 tanuló hiányzott**, és a dolgozatot ekkor megíró tanulók (helyes) **átlageredménye 67,2 pont volt**. (1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján: 75 tanuló írta meg első alkalommal a dolgozatot, az ő pontszámaik összege $75 \cdot 67,2 = 5040$.

Ezt a pótdolgozatot író 5 tanuló $5 \cdot 64 = 320$ ponttal növelte. Így a 80 tanuló átlaga $\frac{5350}{80} = 67$ pont lett valóban. (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 51. feladat*

Összesen: 16 pont

30)

a) Döntse el az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba! (4 pont)

A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van

B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros:

C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.

D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

A	B	C	D

b) Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és mégis kitölti a fenti táblázatot, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza? (3 pont)

c) Tagadja az alábbi mondatot:

„Nincs olyan szerelem, aki el nem múlik” (*Népdalgyűjtés*) (3 pont)

d) Fogalmazzon meg egy olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldása így számítható ki: $\binom{17}{2}$. (3 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Gráfelmélet 1. feladat*

b) *Lásd: Gráfelmélet 1. feladat*

c) **Van olyan szerelem, amelyik nem múlik el** (3 pont)

d) Például: **Hány egyenest határoz meg a sík 17 pontja, ha nincs közöttük három egy egyenesre illeszkedő?** (3 pont)

Összesen: 13 pont

31) **Egy középiskola 12. osztályának egy csoportjában minden tanuló olyan matematika dolgozatot írt, amelyben 100 pont volt az elérhető maximális pontszám. A csoport eredményéről a következőket tudjuk: 5 tanuló maximális pontszámot kapott a dolgozatára, minden tanuló elért legalább 60 pontot, és a dolgozatok pontátlaga 76 volt. Minden tanuló egész pontszámmal értékelt dolgozatot írt.**

a) Legalább hányan lehettek a csoportban? (5 pont)

b) Legfeljebb hány diák dolgozata lehetett 60 pontos, ha a csoport létszáma 14? (4 pont)

A 14 fős csoportból Annának, Balázsnak, Csabának, Dorkának és Editnek lett 100 pontos a dolgozata. Pontosan hatan írtak 60 pontos dolgozatot, és csak egy olyan tanuló volt, akinek a pontszáma megegyezett az átlagpontszámmal.

c) Hányféleképpen valósulhatott ez meg? (A csoport két eredményét akkor tekintjük különbözőnek, ha a csoport legalább egy tanulójának különböző a dolgozatra kapott pontszáma a két esetben) (7 pont)

Megoldás:

a) Jelölje n a csoportba járó diákok számát. A feltételek alapján a dolgozatok összpontszáma $76n$. (1 pont)

5 dolgozat 100 pontos (n-5) tanuló legalább 60 pontot kapott a dolgozatára, ezért legalább $500+(n-5)\cdot 60$ pontot értek el (1 pont)

$76n \geq 500+(n-5)\cdot 60 \quad (n \in \mathbb{N})$ (1 pont)

Ebből $n \geq 12{,}5$ (1 pont)

Tehát a csoportnak legalább 13 tagja volt. (1 pont)

b) A diákok által elért összpontszám $14\cdot 76 = 1064$ (1 pont)

Ebből a maximális pontszámot elérők 500 pontot, a maradék 9 tanuló összesen 564 pontot ért el (1 pont)

Mivel $564-9\cdot 60 = 24 > 0$, kilencen nem lehettek 60 pontosak (1 pont)

Nyolc tanuló dolgozata lett 60 pontos, mert $564-8\cdot 60 = 84 > 60$, (kilencedik tanuló pontszáma ekkor 84), **ezért legfeljebb 8 tanulónak lehetett 60 pontos dolgozata.** (1 pont)

a) *Lásd: Kombinatorika 9. feladat*

Összesen: 16 pont

32) **Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.**

a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő! (4 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja.

b) Hány éves András? (6 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső, Edit és Feri moziba mennek.

c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön? (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 20. feladat*

b) Ha Barbara x éves, akkor Cili $x+3$ éves, és így Dezső, Barbara és Edit életkora rendre $x-6$, x, illetve $x+12$ év. (1 pont)

Mivel ez a három szám egy mértani sorozat három szomszédos tagja, ezért:

$(x-6)(x+12)=x^2$. (1 pont)

A zárójeleket felbontva:

$x^2+6x-72=x^2$, (1 pont)

ahonnan $x=12$. (1 pont)

Ellenőrzés: Dezső, Barbara és Edit életkora 6, 12, illetve 24 év, ez a három szám pedig valóban egy mértani sorozat három szomszédos tagja. (1 pont)

András tehát 9 éves. (1 pont)

c) *Lásd: Kombinatorika 29. feladat*

Összesen: 16 pont

33) Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

a) A kész talapzatnak hány éle, hány csúcsa, hány lapja van? (3 pont)

b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne? (6 pont)

c) Az ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat: a szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb; a hét zöld jade tárgy mindegyik 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél. A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől? (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 2. feladat*

b) *Lásd: Térgeometria 2. feladat*

c) Legyen m az ajándéktárgy megrendelt tömege. Az összes tömeg $20m$. Foglaljuk táblázatba a csiszolt ajándéktárgyakról tudott információkat.(2 pont)

anyag	achát	hematit	zöld jade	gránát
gyakoriság	3 db	6 db	7 db	4 db
tömeg	$0{,}99m$	$0{,}995m$	$1{,}015m$	

Jelöljük $(x\cdot m)$-mel a gránátból készített ajándéktárgy valódi tömegét. Tudjuk, hogy a tényleges össztömeg $20m$, innen

$20\cdot m=3\cdot 0{,}99m+6\cdot 0{,}995m+7\cdot 1{,}015m+4\cdot xm$ (2 pont)

Ebből következik, hogy $x=0{,}98875$ (2 pont)

A gránát ajándéktárgyak tömege **1,125%-kal kisebb** a megrendeltnél. (1 pont)

Összesen: 16 pont

34)

a) Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható? (6 pont)

Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.)

Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a hátralévő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja! (6 pont)

Az egyik játékhéten összesen 3 222 831 lottószelvényt küldtek játékba a játékosok. Az alábbi táblázat mutatja a nyertes szelvények számát és nyereményét (2-nél kevesebb találattal nem lehet nyerni).

Találatok száma	**Nyertes szelvények száma**	**Nyeremény (Ft/nyertes szelvény)**
5	0	0
4	17	3 113 255
3	1617	34 915
2	62 757	1970

c) Számítsa ki, hogy mennyi volt a játékosok egy lottószelvényre jutó átlagos vesztesége ezen a héten, ha a játékba küldött szelvények egységára 250 Ft! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Számelmélet 13. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 56. feladat*

c) Az összes kifizetett nyeremény:

$17 \cdot 3\,113\,255 + 1617 \cdot 34\,915 + 62\,757 \cdot 1970 = 233\,014\,180\,\text{Ft}.$ (2 pont)

Az egy szelvény árát is figyelembe véve az egy szelvényre jutó átlagos veszteség $250 - 72{,}3 = \mathbf{177{,}7\,Ft}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

35) Egy étteremben (hatósági engedély birtokában) az érvényes általános forgalmi adótól (áfa) kismértékben eltérő adókulcsok alkalmazásának hatását vizsgálták az ételek és italok fogyasztására nézve. Az ételek esetében 4%, az italok esetében 30% áfát adtak hozzá a nettó árhoz, és az így kapott bruttó árat kellett a vendégnek kifizetnie.

A kísérlet első napján az új számítógépes program hibája miatt a számlán éppen fordítva adták a nettó árakhoz az áfát: az ételek nettó árához 30%-ot, az italok nettó árához pedig 4%-ot számoltak hozzá, és ez a számlán is így, hibásan jelent meg.

Egy család ebben a vendéglőben ebédelt, és a hibás program miatt 8710 Ft-os számlát kapott. A hibát észrevették, így végül a helyes összeget, 7670 Ft-ot kellett kifizetniük.

a) Hány forint volt az elfogyasztott ételek, és hány forint volt az elfogyasztott italok helyes bruttó ára? (7 pont)

Egy másik étteremben 12 és 14 óra között 3900 Ft befizetéséért annyit eszik és iszik a vendég, amennyit szeretne.
A befizetendő összeget egy előzetes felmérés alapján állapították meg. A felmérés során minden vendég esetén összeadták az elfogyasztott étel és ital árát az adott fogyasztáshoz tartozó összes egyéb költséggel. Az összesített költségek alapján osztályokba sorolták a vendégeket aszerint, hogy az étteremnek hány forintjába kerültek.
Az alábbi táblázat mutatja a felmérés eredményét. A táblázat első sorában az osztályközepek láthatóak.

fejenként ennyi Ft-ba került az étteremnek	**1000**	**1900**	**2800**	**3600**	**4400**	**5200**
a vendégek ennyi %-a	**10**	**20**	**25**	**30**	**10**	**5**

b) A felmérés eredményét felhasználva számítsa ki, hogy ennek az étteremnek 1000 vendég esetén mekkora a várható haszna! (3 pont)

c) A fenti táblázat értékeivel számolva mennyi a valószínűsége, hogy két (ebédre betérő) vendég együttes fogyasztása veszteséget jelent az étteremnek?
(A táblázatba foglalt információkat tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen betérő vendég esetén pl. 0,25 annak a valószínűsége, hogy a vendég 2800 Ft-ba kerül az étteremnek.) (6 pont)

Megoldás:

a) Ha a javított számla alapján ételekért végül bruttó x Ft-ot, az italokért y Ft-ot fizettek, akkor a hibás számla szerint az ételekért $\frac{x}{1,04}\cdot 1,30 = 1,25x$, az italokért pedig $\frac{y}{1,30}\cdot 1,04 = 0,8x$ Ft-ot kellett volna fizetniük. (2 pont)

$$\begin{cases} 1,25x + 0,8y = 8710 \\ x + y = 7670 \end{cases}$$ (1 pont)

A második egyenletet 0,8-del szorozva:

$$\begin{cases} 1,25x + 0,8y = 8710 \\ 0,8x + 0,8y = 6136 \end{cases}$$

A két egyenlet különbségéből $0,45x = 2574$, azaz $x = 5720$. (2 pont)

A helyesen kiállított számla szerinti bruttó ételfogyasztás **5720 Ft**, a bruttó italfogyasztás pedig $y = 7670 - x =$ **1950 Ft** volt. (1 pont)

Ellenőrzés: A tévesen kiállított számlán bruttó $5720 : 1,04 \cdot 1,3 + 1950 : 1,3 \cdot 1,04 = (7150 + 1560 =) 8710$ Ft szerepelt valóban.

(1 pont)

Alternatív megoldás:

Ha a javított számla alapján az ételekért végül bruttó x Ft-ot, az italokért y Ft-ot fizettek, akkor a hibás számla szerint az ételekért $x : 1,04 \cdot 1,30$ az italokért pedig $\frac{y}{1,30}\cdot 1,04$ Ft-ot kellett volna fizetniük. (1 pont)

$$\begin{cases} \frac{x}{1,04}\cdot 1,3+\frac{y}{1,3}\cdot 1,04=8710 \\ x+y=7670 \end{cases}$$ (1 pont)

A második egyenletből $x=7670-y$ ezt az elsőbe visszaírva:

$\frac{(7670-y)\cdot 1,3}{1,04}+\frac{y\cdot 1,04}{1,3}=8710$.

$(7670-y)\cdot 1,25+y\cdot 0,8=8710$

$9587,5-0,45y=8710$ (3 pont)

A helyesen kiállított számla szerinti bruttó italfogyasztás $y=\frac{9587,5-8710}{0,45}=\mathbf{1950}$ **Ft**, a bruttó ételfogyasztás pedig $x=7670-y=\mathbf{5720}$ **Ft** volt. (1 pont)

Ellenőrzés: tévesen kiállított számlán bruttó $5720:1,04\cdot 1,3+1950:1,3\cdot 1,04=(7150+1560=)8710$ Ft szerepelt valóban.

(1 pont)

Alternatív megoldás:

Legyen az elfogyasztott ételek nettó ára x Ft az italoké pedig y Ft.

Ekkor $\begin{cases} 1,3x+1,04y=8710 \\ 1,04x+1,3y=7670 \end{cases}$ (2 pont)

Az első egyenletből kivonva a másodikat: $0,26(x-y)=1040$,

azaz $x-y=4000$, tehát $x=4000+y$.

Ezt visszaírva az első egyenletbe: $1,3(4000+y)+1,04y=8710$.

$5200+2,34y=8710$

$y=\frac{8710-5200}{2,34}=1500$ és $x=4000+y=5500$ (3 pont)

A bruttó ételfogyasztás $5500\cdot 1,04=\mathbf{5720}$ **Ft**,

a bruttó italfogyasztás $1500\cdot 1,3=\mathbf{1950}$ **Ft** volt. (1 pont)

Ellenőrzés: A helyesen kiállított számlán bruttó $5500\cdot 1,04+1500\cdot 1,3=(5720+1950=)7670$ Ft, a tévesen kiállított számlán pedig bruttó $5500\cdot 1,3+1500\cdot 1,04=(7150+1560=)8710$ Ft szerepelt valóban. (1 pont)

b) A 1000 vendég összesen

$100\cdot 1000+200\cdot 1900+250\cdot 2800+300\cdot 3600+100\cdot 4400+50\cdot 5200=$
$=2\,960\,000$ Ft-ba kerül. (1 pont)

1000 vendég 3 900 000 Ft-ot fizet be,

így az étterem várható haszna **940 000Ft** (2 pont)

Alternatív megoldás:

Ha egy vendég k Ft-ba kerül és 3900 Ft-ot fizet, akkor az étterem haszna $(3900-k)$ Ft. (1 pont)

A várható haszon 1000 vendég fogyasztása után:

$100\cdot 2900+200\cdot 2000+250\cdot 1100+300\cdot 300+100\cdot(-500)+50\cdot(-1300)=$

$=$ **940 000 Ft**. (2 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 57. feladat*

Összesen: 16 pont

36) Van néhány dobozunk és valahány érménk. Ha minden dobozba egy érmét teszünk, akkor m darab érme kimarad. Ha minden dobozba pontosan m db érmét akarunk tenni, akkor m dobozba nem jut érme $(m \neq 1)$.

a) Hány érménk lehet, ha a dobozok száma 6? (6 pont)

Egy dobozban több ezer érme van, amelyek 3%-a hibás. Az érmék közül véletlenszerűen kiválasztunk 80-at. (Az érmék nagy száma és az alacsony hibaszázalék miatt a kiválasztás visszatevéses mintavétellel is modellezhető.)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 hibás érme lesz a kiválasztott érmék között? (5 pont)

Megoldás:

a) Jelölje az érmék számát e.

Ekkor egyrészt $e = 6 + m$, másrészt $e = (6 - m)m$. (2 pont)

$6 + m = (6 - m)m$

$m^2 - 5m + 6 = 0$ (1 pont)

Az egyenlet megoldása $m_1 = 2$ vagy $m_2 = 3$, (1 pont)

az érmék száma ekkor $\boldsymbol{e_1 = 8}$ vagy $\boldsymbol{e_2 = 9}$. (1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján. (Ha $m = 2$ és 8 érménk van, akkor egyrészt kimarad $8 - 6 = 2$ érme, másrészt $6 - 4 = 2$ dobozba nem jut érme; ha pedig $m = 3$ és 9 érménk van, akkor kimarad 3 érme, és $6 - 3 = 3$ dobozba nem jut érme valóban.) (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 58. feladat*

Összesen: 11 pont

37) Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az A halamaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a B halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a C halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy.

a) Hány eleme van az $A \setminus (B \cap C)$ halmaznak? (5 pont)

Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

b) Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összeg 4 lesz? (5 pont)

Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának n forintot $(n > 80)$; ha a dobás eredménye 1, akkor Béla fizet $(n - 80)$ forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak $2(n - 80)$ forintot.

c) Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0? (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Halmazok 13. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 59. feladat*

c) Andi $\frac{3}{6}$ valószínűséggel veszít n forintot;

$\frac{1}{6}$ valószínűséggel nyer $(n-80)$ forintot;

$\frac{2}{6}$ valószínűséggel nyer $2n-160$ forintot. (1 pont)

Andi nyereményének (egyúttal Béla veszteségének) várható értéke: $-\frac{3}{6}n+\frac{1}{6}(n-80)+\frac{2}{6}(2n-160)$. (2 pont)

A játék igazságos (mindkét játékos számára), ha

$-\frac{3}{6}n+\frac{1}{6}(n-80)+\frac{2}{6}(2n-160)=0$, (1 pont)

innen $n=20$ (Ft). (1 pont)

1-es dobás esetén tehát $200-80=\mathbf{120}$ forintot fizet Béla Andinak. (1 pont)

Összesen: 16 pont

38) Van egy részvénycsomagunk, amely 6600 Ft-os és 4800 Ft-os névértékű részvényeket tartalmaz. A részvényeink névértékének összege 131400 Ft.

Ha a 4800 Ft-os névértékű részvényeink harmadát 6600 Ft-osra cserélnénk, akkor a névértékek összege 140400 Ft-ra növekedne.

a) Hány darab részvényünk van az egyes fajtákból? (9 pont)

Van két, most induló hosszú távú befektetésünk is. Az egyiknél 500000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik.

b) Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak?

(6 pont)

Megoldás:

a) Tegyük fel, hogy x db 6600Ft-os részvényünk van.

$$\left.\begin{array}{l} 6600x+4800y=131400 \\ 6600\left(x+\frac{y}{3}\right)+4800\cdot\frac{2}{3}y=140400 \end{array}\right\}$$ (2 pont)

A második egyenletből az elsőt kivonva:

$2200y-1600y=9000$ (1 pont)

$y=15$ (1 pont)

Visszahelyettesítve $x=9$,

Tehát 9 db 6600Ft-os, 15 db 4800Ft-os részvényünk van. (1 pont)

$6600\cdot 9+4800\cdot 15=131400$,

15 db 4800Ft-os részvény harmadát, 5 db-ot cserélnénk 6600 Ft-osra. Összértéke valóban $4800\cdot 10+6600\cdot 14=140400$. (1 pont)

b) *Lásd: Sorozatok 34. feladat*

Összesen:15 pont

39) **Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár *n*-szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni $\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$. Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.**

a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik! (3 pont)

b) Határozza meg azt az *n* értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne! (9 pont)

Az összes sorsjegy 5%-a nyerő. Kétféle nyeremény van: 2500 Ft-os és 50000 Ft-os. A 2500 Ft-os nyerő sorsjegyből pontosan 24-szer annyi van, mint az 50000 Ft-osból.

c) Töltse ki az alábbi táblázat üres mezőit, majd számítsa ki egy darab sorsjegy nyereményének várható értékét! (4 pont)

1 db sorsjegy nyereménye (Ft)	0	2500	50000
nyeremény valószínűsége	0,95		

Megoldás:

a) A sorsjegy árát $20 \cdot 10 = 200$ Ft-tal csökkentették, tehát $n = 20$. (1 pont)

Ekkor az eladott sorsjegyek száma $10n^2 = 4000$ -rel több, azaz $5000 + 4000 = 9000$ db, (1 pont)

a havi bevétel pedig $9000 \cdot 300 = 2\,700\,000$ Ft. (1 pont)

b) Lásd: Függvények – Analízis 49. feladat

c) Lásd: Valószínűségszámítás 60. feladat

Összesen: 16 pont

40) **Margiték autójában a fedélzeti számítógép kiszámítja, hogy az autó üzemanyagtartályában lévő benzin még hány kilométer megtételéhez elegendő. Nevezzük ezt *hátralévő távolság*nak. A számításhoz a gép a legutolsó tankolás óta mért átlagos fogyasztást veszi alapul, és úgy számol, hogy az autó a jövőben is ezzel az átlagfogyasztással fog haladni. A legutóbbi tankolás alkalmával teletöltötték az autó üzemanyagtartályát, így 45 liter benzin volt benne. A tankolás óta éppen 200 kilométert tettek meg a városban, ekkor az autó átlagfogyasztása 10 liter volt 100 kilométerenként.**

a) Számítsa ki a városi autózás után a hátralévő távolságot! (3 pont)

A 200 kilométeres városi autóhasználatot követően Margiték egynapos autós kirándulást tettek vidéken, ezalatt összesen 100 kilométert autóztak (újabb tankolás nélkül). A kirándulás végén a kijelző alapján 200 kilométerre elegendő benzin maradt, azaz ennyi lett a hátralévő távolság.

b) Mennyi volt az autó 100 km-re vonatkozó átlagfogyasztása a kirándulás során? (6 pont)

Megoldás:

a) A 200 km-es városi úton $(2 \cdot 10 =)20$ litert fogyasztott az autó, (1 pont) a benzintartályban $(45-20=)25$ liter benzin maradt. (1 pont)

A hátralévő távolságot a 10 literes átlagfogyasztással számítja ki a fedélzeti számítógép: $\frac{25}{10}\cdot 100=$ **250 km**. (1 pont)

Alternatív megoldás:

A számítógép a városi átlagfogyasztás alapján a 45 liter benzint $\frac{45}{10}\cdot 100=450$ km-re elégnek számítja. (2 pont)

Már megtettek 200 km-t, így a hátralévő távolság $(450-200=)$ **250 km**.

(1 pont)

b) Az első 300 km után a számítógép szerint 45 liter benzinnel $300+200=500$ km-t lehet megtenni. (1 pont)

Ezért a gép szerinti átlagfogyasztás a 300 km során $\frac{45}{500}\cdot 100=\frac{9\text{ liter}}{100\text{ km}}$.

(2 pont)

A 300 km-en elfogyasztott benzin $(3\cdot 9=)27$ liter liter és a városban megtett 200 km-en 20 litert fogyasztott az autó, (1 pont)

a kirándulás során így $(27-20=)7$ liter benzin fogyott. (1 pont)

Ezen a szakaszon tehát $\frac{\textbf{7 liter}}{\textbf{100 km}}$ volt az átlagfogyasztás. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Ha a 100 km-es kiránduláson x liter volt a benzinfogyasztás, akkor az első 300 km-es szakaszon $20+x$ liter benzin fogyott, így az átlagfogyasztás $\dfrac{\frac{20+x}{3}\text{ liter}}{100\text{ km}}$. (2 pont)

A számítógép szerint ezzel az átlagfogyasztással 500 km-re (tehát további 200 km-re) elegendő a 45 liter benzin: $45=5\cdot\frac{20+x}{3}$. (2 pont)

Ebből $x=7$, tehát **a 100 km-es kiránduláson $\frac{\textbf{7 liter}}{\textbf{100 km}}$ volt az átlagfogyasztás**.

(2 pont)

Alternatív megoldás:

Ha a 100 km-es kiránduláson x liter volt a benzinfogyasztás, akkor az első 300 km-en $20+x$ liter benzint fogyasztott az autó. Így $25-x$ liter maradt az üzemanyagtartályban. (2 pont)

A számítógép szerint az első 300 km-en mért átlagfogyasztás egyenlő a hátralévő 200 km-en tervezett átlagfogyasztással: $\frac{20+x}{3}=\frac{25-x}{2}\left(\frac{\text{liter}}{100\text{ km}}\right)$.

(2 pont)

Ebből $x=7$, tehát **a 100 km-es kiránduláson $\frac{\textbf{7 liter}}{\textbf{100 km}}$ volt az átlagfogyasztás**.

(2 pont)

Összesen: 9 pont